Міністерство освіти і науки україни

ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ «Бердянський машинобудівний ФАХОВИЙ коледж

національного університету «запорізька політехніка»

Циклова комісія гуманітарної, соціально-економічної та природничо-наукової підготовки

# **ВИЩА МАТЕМАТИКА**

***Методичний посібник для практичних занять***

|  |  |
| --- | --- |
| Галузь знань | 07 Управління та адміністрування |
| Спеціальність | 072 Фінанси, банківська справ та страхування |
| ОПП | Фінанси, банківська справ та страхування |

2023

Розробила:

викладач вищої категорії, викладач-методист Кожушко О.Я.



# **ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**

Навчальна дисципліна “Вища математика” для студентів другого курсу розроблена у відповідності з галузевими стандартами вищої освіти .

Головна мета викладання дисципліни – дати студентам фундаментальні знання з математики, щоб у подальшому вони могли засвоювати спеціальні дисципліни, які базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага приділяється виробленню практичних навичок у процесі розв`язування конкретних задач, а також навчанню застосовувати математичні методи для дослідження реальних економічних процесів і прийняття оптимальних управлінських рішень в економіці, управлінні та бізнесі, в моделюванні та оптимізації організаційних процесів. Крім того, враховуючи професійне спрямування, студентам надається можливість ознайомитися з безпосереднім використанням комп`ютера при розв`язуванні математичних задач.

Після засвоєння дисципліни студенти повинні:

- вміти застосовувати математичну теорію та математичні методи при математичному моделюванні процесів в економічних системах, розв`язувати оптимізаційні задачі управління економічними системами та організаційними процесами;

- знати математичний апарат, що дає змогу ефективно розв`язувати фінансові, економічні й управлінські задачі;

- уміти застосовувати математичну теорію та математичні методи для дослідження реальних економічних процесів і прийняття оптимальних управлінських рішень із використанням сучасної обчислювальної техніки і проблемно-орієнтованих пакетів прикладних програм.

Навчальна дисципліна “Вища математика” в підготовці спеціалістів є базовим курсом для спеціальностей, спрямованих на вміння застосовувати математичні методи при математичному моделюванні процесів для дослідження реальних економічних систем і прийняття оптимальних управлінських рішень.

Посібник містить навчально-методичний план, програму вивчення дисципліни “Вища математика” , завдання для практичних занять, самостійної та індивідуальної роботи студентів, контрольні роботи та приклади їх розв`язання, в тому числі із застосуванням комп`ютерних прикладних програм MathCad, перелік питань для самоперевірки, до заліку та іспиту з даної дисципліни, розподіл балів при рейтинговій системі оцінювання.

**Тематичний план**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | | |
| усього | л | п | с.р. |
| **Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри.** | | | | |
| **Тема 1.** Матриці та дії над ними. Визначники. | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **Тема 2.** Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **Разом за змістовим модулем 1** | **16** | **4** | **4** | **8** |
| **Змістовий модуль 2. Векторна алгебра. Аналітична геометрія.** | | | | |
| **Тема 1.** Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі. Поняття вектора. Операції над векторами. | 7 | 2 | 2 | 3 |
| **Тема 2.** Пряма на площині. Лінії другого порядку. | 5 | 2 | - | 3 |
| **Тема 3.** Площина і пряма у просторі. Поверхні другого порядку. | 7 | 2 | 2 | 3 |
| **Разом за змістовим модулем 2** | **19** | **6** | **4** | **9** |
| **Змістовий модуль 3. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної.** | | | | |
| **Тема 1.** Функції та їх властивості. | 4 | 2 | - | 2 |
| **Тема 2.** Границя послідовності. Границя функції. Неперервність функції. | 6 | 2 | 2 | 2 |
| **Тема 3.** Похідна функції. | 6 | 4 |  | 2 |
| **Тема 4.** Диференціал функції. Основні теореми диференціального числення. | 8 | 4 | 2 | 2 |
| **Тема 5.** Дослідження функції та побудова її графіка. | 7 | 3 | 2 | 2 |
| **Разом за змістовим модулем 3** | **31** | **15** | **6** | **10** |
| **Змістовий модуль 4. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння.** | | | | |
| **Тема 1.** Невизначений інтеграл, його властивості та методи обчислення. | 8 | 4 | 2 | 2 |
| **Тема 2.** Визначений інтеграл, його властивості, обчислення і застосування. | 8 | 4 | 2 | 2 |
| **Тема 3.** Диференціальні рівняння. | 8 | 4 | 2 | 2 |
| **Разом за змістовим модулем 4** | **24** | **12** | **6** | **6** |
| **Усього годин** | **90** | **37** | **20** | **33** |

**1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії, теорія матриць та вектори.**

***Завдання для практичної роботи 1:***

1. Виконати дії над матрицями: 3А+2В; А·С, А·В, В·А, де

.

1. Обчислити визначники матриць:

.

3. Виконати нарахування заробітної плати, що приходиться на кожне замовлення різних деталей, якщо відомі наступні дані:

а) Кількість виробів (у штуках) в кожному замовленні:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Замовлення | Кількість виробів | | |
| А | В | С |
| К | 0 | 4 | 2 |
| L | 0 | 2 | 4 |
| M | 5 | 1 | 0 |

б) Затрати робочої сили в годинах на кожному робочому місці та на кожний виріб:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виріб | Затрати на робочому місці | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| А | 2 | 1 | 4 | 5 | 0 |
| В | 1 | 4 | 2 | 5 | 2 |
| С | 0 | 1 | 0 | 3 | 4 |

в) Заробітна плата (в гривнях) за годину на кожному робочому місці:

|  |  |
| --- | --- |
| Робоче місце | Погодинна заробітна плата |
| 1 | 1,25 |
| 2 | 1,40 |
| 3 | 1,40 |
| 4 | 1,40 |
| 5 | 1,25 |

**Загальна теорія системи лінійних рівнянь.**

**Практичне заняття 2.**

*Мета: навчитися обчислювати обернену матрицю, засвоїти методи розв`язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.*

***Контрольні питання:***

1. Які матриці називаються рівними?
2. Як виконується добуток матриці на число?
3. Що таке розмірність матриці?
4. Як додавати матриці однакової розмірності?
5. Чи комутативна сума двох матриць?
6. Які матриці називаються узгодженими?
7. Чи комутативний добуток матриць?
8. Дати означення оберненої матриці.
9. Як будується обернена матриця?
10. Розв`язати матричне рівняння А·Х = В.
11. Розв`язати матричне рівняння Х·А = В.
12. Розв`язати матричне рівняння А·Х·В = С.
13. Яка матриця називається виродженою?
14. Навести формули Крамера.
15. У чому суть методу Гауса?

***Задачі:***

1. Знайти обернену до матрицю.
2. Знайти обернену до матрицю.
3. Розв`язати матричне рівняння А·Х = В, де

, .

1. Розв`язати систему лінійних рівнянь.



а) методом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

***Завдання для практичної роботи 2:***

1. Знайти обернену до матрицю.

2. Знайти обернену до матрицю.

3. Розв`язати матричне рівняння Х·А = В, де

, .

4. Розв`язати систему лінійних рівнянь АХ = С, де

, 

а) методом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

1. З пункту А в пункт В необхідно перевезти обладнання трьох типів: І – 95 од., ІІ – 100 од., ІІІ – 185 од. Для перевезення обладнання завод може замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, що вміщується на певний вид транспорту, наведено у таблиці:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип обладнання | Вид транспорту | | |
| Т1 | Т2 | Т3 |
| І | 3 | 2 | 1 |
| ІІ | 4 | 1 | 2 |
| ІІІ | 3 | 5 | 4 |

Записати у математичній формі умови перевезення. Встановити, скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно для перевезення обладнання з пункту А в пункт В. Розв`язати систему методом Гаусса.

6. З двох заводів поставляються автомобілі на два автопідприємства, потреби яких відповідно 200 і 300 автомобілів. Перший завод випустив 350 автомобілів, другий – 150. Витрати на перевезення автомобілів із заводів до кожного автопідприємства задано у таблиці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Завод | Витрати на перевезення до  авто підприємства, грош.од. | |
| 1 | 2 |
| І | 15 | 20 |
| ІІ | 8 | 25 |

Мінімальні витрати на перевезення становлять 7950 грош.од. Знайти оптимальний план перевезень автомобілів.

**Елементи аналітичної геометрії на площині.**

**Практичне заняття 3.**

*Мета: вивчити види рівнянь прямої на площині; ознайомитися з кривими другого порядку: еліпсом, гіперболою, параболою; розглянути їх економічне застосування.*

***Контрольні питання:***

1. Навести рівняння прямої в загальному вигляді.
2. Навести рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
3. Навести рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом.
4. Навести рівняння прямої у відрізках на осях координат.
5. Навести канонічне та параметричне рівняння прямої.
6. Навести умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Дати означення еліпса.
8. Навести канонічне рівняння еліпса.
9. Як визначаються фокальні радіуси еліпса?
10. Навести властивості еліпса.
11. Що називається ексцентриситетом еліпса? Як він характеризує еліпс?
12. Дати означення директрис еліпса?
13. Дати означення гіперболи.
14. Навести канонічне рівняння гіперболи.
15. Навести властивості гіперболи.
16. Які прямі називаються асимптотами гіперболи?
17. Що називається ексцентриситетом гіперболи? Як він характеризує гіперболу?
18. Дати означення директрис гіперболи? Як вони розташовані?
19. Дати означення параболи.
20. Навести канонічне рівняння параболи.
21. Навести властивості параболи.

***Задачі:***

1. Дано рівняння еліпса . Знайти ексцентриситет та рівняння директрис.

2. Скласти рівняння еліпса, якщо фокальна відстань дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює 1/2.

3. Скласти рівняння еліпса, якщо  , велика піввісь а =2.

4. Скласти рівняння еліпса, якщо ексцентриситет дорівнює , а відстань між директрисами дорівнює 32.

5. Скласти рівняння еліпса, якщо він проходить через точки .

6. Скласти рівняння гіперболи, якщо b = 4, с = 5.

7. Скласти рівняння гіперболи, якщо с = 3, .

8. Написати канонічне рівняння гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює , а відстань між директрисами дорівнює .

9. Написати рівняння параболи, що проходить через точку V(4;-8) симетрично осі *ОХ*, з вершиною у початку координат.

10. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо фокус міститься в точці *F* (0;-3).

***Завдання для практичної роботи :***

1. Скласти рівняння еліпса, якщо:

1) ; 2) ;

3) ; 4) .

2. Скласти рівняння гіперболи, якщо:

1) ; 2) гіпербола проходить через точки

.

3. Відстань між двома торговими організаціями становить 8 км. Знайти рівняння множини всіх можливих місцезнаходжень баз, які обслуговують ці організації, якщо відомо, що сума відстаней від бази до них повинна бути сталою і дорівнювати 20 км.

4. Відстань між двома заводами, що виробляють однакову продукцію, дорівнює 400 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від заводу *А* складають 2 грош.од. на 10 км, а від заводу *В* – 3 грош.од. на 10 км. Визначити межу районів, для яких однаково вигідно придбання продукції як на заводі *А*, так і на заводі *В*.

5. Два підприємства, що віддалені одне від одного на 100 км, виробляють однакові вироби. Ціна реалізації одиниці товару для обох підприємств однакова і дорівнює *р*. Нехай транспортні витрати на перевезення одиниці товару від підприємства *А* до споживача становлять 1 грош.од. на 1 км, а від підприємства *В* – 2 грош.од. на 1 км. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці товару в підприємствах *А* і *В* повинні бути однаковими? Як підприємствам доцільніше обслуговувати споживачів?

6. Два однотипних підприємства *А* та *В* виробляють продукцію з однією і тією ж оптовою опускною ціною *m* за один виріб. Автопарк, який обслуговує підприємство *А*, оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу становлять за 1 км: для підприємства *А* – 10 грош.од., для підприємства *В* – 20 грош.од. Відстань між підприємствами 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

**Аналітична геометрія у просторі.**

***Завдання для самостійної роботи :***

1. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі *ОZ* і проходить через точки *А*(2;3;-1) і *В*(-1;2;1).

2. Знайти відстань від точки *А*(2;3;-1) до площини *7х-6у-6z+42=0*.

3. Які відрізки на координатних осях відтинає площина *2х+3у-5z+30=0*?

4. Через точку *М*(2;3;-1) провести площину, паралельну площині *2х-3у+5z-4=0*.

5. Через точки *М*(1;2;3) і *N*(-2;-1;3) провести площину, перпендикулярну до площини *х+4у-2z+5=0*.

6. Знайти кут між двома площинами *5х-3у+4z-4=0* та *3х-4у-2z+5=0*.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки

*А*(1;2;-1), *В*(-1;0;4), *С*(-2;-1;1).

8. Знайти канонічне рівняння прямої, заданої загальним рівнянням



9. Знайти кути, які пряма утворює з осями координат.

10. Знайти гострий кут між прямими



11. Через точку *А*(1;-1;2) провести пряму, паралельну прямій 

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки *А*(1;2;-1) і *В*(0;3;-4).

***Приклади розв`язування задач:***

1. Виконати дії матрицями



а) *3А+2В*;

б) *А·В; В·А*;

в) *А·С*.

*Розв`язання:*

а) 



б) 





Отже, *А·В ≠ В∙А*, тобто *А* та *В* не комутативні.

в) 

2. Обчислити визначник матриці .

*Розв`язання:* Обчислимо визначник за допомогою алгебраїчних доповнень.

det 

3. Знайти матрицю , обернену до матриці

.

*Розв`язання*: Для знаходження оберненої матриці використаємо формулу:



де - приєднана до *А* матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці *А*; символом *Т* позначено операцію транспортування.

а) 

отже, матриця *А* не вироджена, тобто вона має обернену матрицю.

б) Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці *А*:







Тоді



Отже, 

в) Отримаємо обернену матрицю



г) Впевнимося, що - обернена матриця до *А*. Якщо матриця  знайдена правильно, то повинна виконуватись рівність , де *Е* – одинична матриця.



Таким чином, матриця є оберненою до матриці *А*.

4. Розв`язати матричне рівняння *А·Х=В*, де



*Розв`язання:*

Помножимо обидві частини рівняння *А∙Х=В* на зліва, тобто

тобто 

Таким чином, для розв`язання задачі необхідно побудувати матрицю , обернену до матриці *А*.

З попередньої задачі маємо

.

Тоді розв`язком матричного рівняння буде матриця



5. Розв`язати систему рівнянь



а) методом Крамера;

б) методом Гаусса;

в) матричним методом.

*Розв`язання:*

а)  

Тоді:



б) Складемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутної за допомогою елементарних перетворень:



Від другого рядка матриці віднімемо перший рядок, помножений на 2, а від третього рядка віднімемо перший, помножений на 3:



Від третього рядка віднімемо другий, помножений на 8:



Відповідно запишемо систему:



З другого рівняння маємо



Отже, розв`язок системи: 

в) Систему можна записати у матричному вигляді *А∙Х=В*, де

Тоді (якщо det *А ≠* 0) розв`язок системи знаходимо за формулою 

Знайдемо матрицю , обернену до А.

Тоді 

Таким чином, розв`язок системи 

6. Вершини трикутника лежать в точках 

Скласти:

а) рівняння прямої 

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущених з вершини .

*Розв`язання:*

а) Рівняння прямої запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

,

де , тобто

 або - рівняння прямої .

б) Запишемо рівняння прямої  як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:



або - рівняння прямої .

Для знаходження рівняння висоти трикутника використаємо умову перпендикулярності прямих:

,

де та - кутові коефіцієнти висоти та прямої відповідно.

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої , то кутовий коефіцієнт висоти – .

Тепер можемо записати рівняння висоти як рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

,

тобто .

Оскільки точканалежить висоті , її координати повинні задовольняти рівняння висоти, тобто 4=3,5∙5 + *b* або *b* = - 13,5.

Отже, рівняння висоти має вигляд

*у* = 3,5*х* – 13,5.

Для знаходження рівняння медіани знайдемо координати основи медіани – точки *С*, яка ділить відрізок навпіл.

Координати середини відрізка знаходимо за формулами:

, , 

тобто координати точки *С*

, ,

або *С*(5,5; 2).

Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки та *С*:

 або *у* = - 4*х* + 24.

7. За допомогою векторної алгебри знайти:

а) довжину ребра , де (2,4,6), (5,4,7);

б) кут між ребрами  та , де (2,4,6), (5,4,7), (-4,8,7).

*Розв`язання:*

а) Знайдемо координати вектора :

(5-2,4-4,7-6), тобто (3,0,1).

Довжина ребра дорівнює модулю вектора . Обчислимо його:

.

б) Косинус кута між векторами обчислюємо за формулою:



Щоб скористатися формулою, обчислимо скалярний добуток векторів  Для цього знайдемо координати цих векторів:

(-4-2, 8-4, 7-6) = (-6, 4, 1).

З пункту 1 маємо (3, 0, 1). Тоді

 = 3 · (-6) + 4 ∙ 0 + 1 ∙ 1 = - 17.

Знайдемо модуль вектора 



Обчислюємо кут між ребрами та :



тобто кут 

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1**

**Завдання І**

Дані наведено в таблиці.

1. Виконати дії над матрицями: а) *3А+2В;* б) *А·В; В·А; в). А·С.*
2. Обчислити визначник матриці *А* (det*A*).
3. Знайти обернену до *А* матрицю .
4. Розв`язати матричне рівняння *АХ = В*.
5. Розв`язати систему рівнянь:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричним методом.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| №  вар. | *А* | *В* | *С* | Система рівнянь |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1. |  |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |
| 4. |  |  |  |  |
| 5. |  |  |  |  |
| 6. |  |  |  |  |
| 7. |  |  |  |  |

Продовження таблиці

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8. |  |  |  |  |
| 9. |  |  |  |  |
| 10. |  |  |  |  |
| 11. |  |  |  |  |
| 12. |  |  |  |  |
| 13. |  |  |  |  |
| 14. |  |  |  |  |
| 15. |  |  |  |  |
| 16. |  |  |  |  |
| 17. |  |  |  |  |
| 18. |  |  |  |  |

Продовження таблиці

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 19. |  |  |  |  |
| 20. |  |  |  |  |
| 21. |  |  |  |  |
| 22. |  |  |  |  |
| 23. |  |  |  |  |
| 24. |  |  |  |  |
| 25. |  |  |  |  |
| 26. |  |  |  |  |
| 27. |  |  |  |  |
| 28. |  |  |  |  |
| 29. |  |  |  |  |

Продовження таблиці

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 30. |  |  |  |  |

**Завдання ІІ**

За допомогою векторної алгебри знайти:

а) довжину ребра ;

б) кут між ребрами та .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. (1, 1, 1); | (7, 5, 6); | (0, -5, 4). |
| 2. (4, 2, 2); | (3, 0, 1); | (-1, 4, 2). |
| 3. (3, -5, 2); | (4, 5, 1); | (-3, 0, 4). |
| 4. (-2, 3, 5); | (7, 5, 6); | (7, 8, -1). |
| 5. (2, 4, -6); | (1, 3, 5); | (0, 2, 0). |
| 6. (4, 3, -1); | (5, 0, 4); | (2, 1, 2). |
| 7. (3, 4, -3); | (-5, 5, 0); | (2, 1, -4). |
| 8. (-2, 1, 7); | (3, -3, 18); | (5, 4, -1). |
| 9. (1, 0, 5); | (3, 2, 7); | (5, 0, 9). |
| 10. (2, 1, 0); | (4, 3, -3); | (-6, 5, 17). |
| 11. (0, 1, 1); | (7, 5, 6); | (0, -5, 4). |
| 12. (3, 2, 2); | (3, 0, 1); | (-1, 4, 2). |
| 13. (2, -5, 2); | (4, 5, 1); | (-3, 0, 4). |
| 14. (-1, 3, 5); | (1, -3, 4); | (7, 8, -1). |
| 15. (1, 4, -6); | (1, 3, 5); | (0, 2, 0). |
| 16. (3, 3, -1); | (5, 0, 4); | (2, 1, 2). |
| 17. (2, 4, -3); | (-5, 5, 0); | (2, 1, -4). |
| 18. (-1, 1, 7); | (3, -3, 18); | (5, 4, -1). |
| 19. (0, 0, 5); | (3, 2, 7); | (5, 0, 9). |
| 20. (1, 1, 0); | (4, 3, -3); | (-6, 5, 17). |
| 21. (0, 1, 1); | (7, 5, 6); | (0, -5, 4). |
| 22. (3, 2, 2); | (3, 0, 1); | (-1, 4, 2). |
| 23. (2, -5, 2); | (4, 5, 1); | (-3, 0, 4). |
| 24. (-3, 3, 5); | (1, -3, 4); | (7, 8, -1). |
| 25. (1, 4, -6); | (1, 3, 5); | (0, 2, 0). |
| 26. (3, 3, -1); | (5, 0, 4); | (2, 1, 2). |
| 27. (2, 4, -3); | (-5, 5, 0); | (2, 1, -4). |
| 28. (-0, 1, 7); | (3, -3, 18); | (5, 4, -1). |
| 29. (0, 0, 5); | (3, 2, 7); | (5, 0, 9). |
| 30. (1, 1, 0); | (4, 3, -3); | (-6, 5, 17). |

**Завдання ІІІ**

Вершинами трикутника є точки , , .

Скласти:

а) рівняння прямої 

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущеної з вершини .

Варіанти завдань:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. (1, 1, ); | (5, 6); | (2, 3). |
| 2. (5, 2); | (0, 1); | (4, 3). |
| 3. ( -5, 2); | (5, 1); | (0, 4). |
| 4. (3, 5); | (-3, 4); | (8, -1). |
| 5. (4, -6); | (3, 5); | (2, 0). |
| 6. (3, -1); | (0, 4); | (1, 2). |
| 7. (4, -3); | (5, 0); | (1, -4). |
| 8. (1, 7); | (-3, 18); | (4, -1). |
| 9. (0, 5); | (2, 7); | (0, 9). |
| 10. (2, 1); | (4, 3); | (-6, 5). |
| 11. (2, 1); | (5, 6); | (2, 3). |
| 12. (4, 2); | (0, 1); | (4, 3). |
| 13. (-4, 2); | (5, 1); | (0, 4). |
| 14. (2, 5); | (-3, 4); | (8, -1). |
| 15. (3, -6); | (3, 5); | (2, 0). |
| 16. (2, -1); | (0, 4); | (1, 2). |
| 17. (3, -3); | (5, 0); | (1, -4). |
| 18. (0, 7); | (-3, 18); | (4, -1). |
| 19. (1, 5); | (2, 7); | (0, 9). |
| 20. (1, 1); | (4, 3); | (-6, 5). |
| 21. (2, 1); | (5, 6); | (2, 3). |
| 22. (4, 2); | (0, 1); | (4, 3). |
| 23. (-4, 2); | (5, 1); | (0, 4). |
| 24. (2, 5); | (-3, 4); | (8, -1). |
| 25. (3, -6); | (3, 5); | (2, 0). |
| 26. (2, -1); | (0, 4); | (1, 2). |
| 27. (3 -3); | (5, 0); | (1, -4). |
| 28. (0, 7); | (-3, 18); | (4, -1). |
| 29. (1, 5); | (2, 7); | (0, 9). |
| 30. (1, 1); | (4, 3); | (-6, 5). |

**ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

**Елементарні функції.**

**Пряма пропорційність**

Функція , де - дійсне число, , називається ***прямою пропорційністю***.

**Основні властивості**

1. Область визначення – *R.*

2. Область значень - *R.*

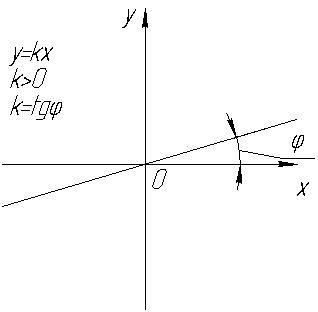
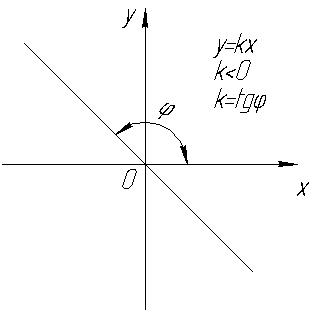
3. Функція непарна.

4. Якщо , то .

5. Якщо , то функція зростає на множині *R.*

6. Якщо , то функція спадає на множині *R.*

7. Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.



**Лінійна функція**

Функція , де , називається ***лінійною функцією.***.

**Основні властивості**

1. Область визначення – *R.*

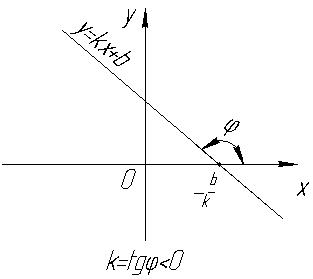
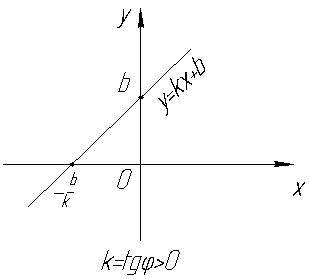
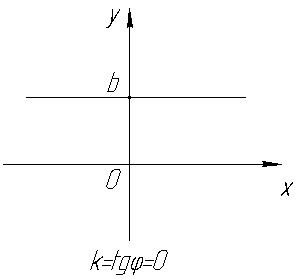
2. Область значень – *R*, якщо , якщо .

3.Якщо , то функція ні парна, ні непарна; якщо - функція парна; якщо , - непарна, якщо - і парна, і непарна.

4. Якщо , то ; якщо , функція .

5. Якщо , то функція зростає на множині *R*; якщо , то функція спадає на множині *R*; якщо , то функція постійна, .

6. Графіком лінійної функції є пряма, що утворює з віссю абсцис кут , тангенс якого дорівнює .



**Обернена пропорційність**

Функція , де , називається ***оберненою пропорційністю***.

**Основні властивості**

1. Область визначення – .

2. Область значень - .

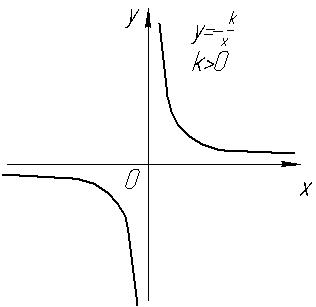
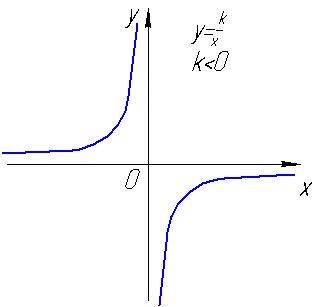
3. Функція непарна.

4. Якщо , то на інтервалі функція спадає, на інтервалі  також спадає. Якщо , то на інтервалах  функція зростає.

5. Графік функції  вісь координат не перетинає.

6. Якщо , то при  функція набуває додатних значень, а при - від`ємних. Якщо , то при функція набуває від`ємних значень, а при - додатних.

7. Графіком оберненої пропорційності є гіпербола.



**Квадратична функція**

Функція , де , називається ***квадратичною***.

**Основні властивості**

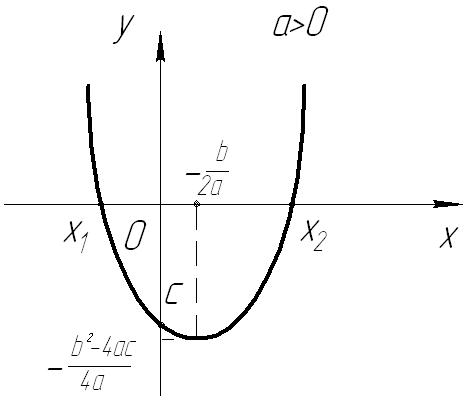
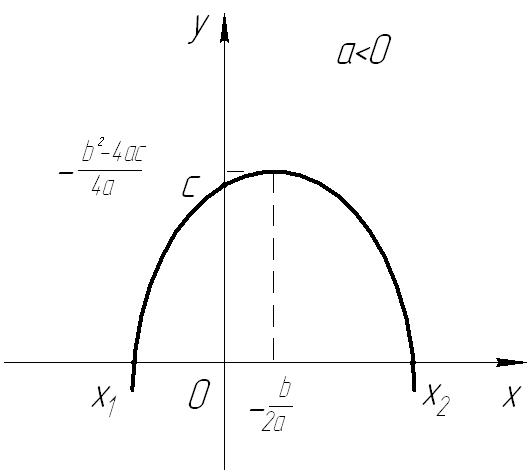
1. Область визначення – *R*.

2. Область значень – якщо , то ;

якщо , то .

3. Якщо , то функція ні парна, ні непарна; якщо , то функція  парна.

4.



Якщо , то функція спадає на проміжку  і зростає на проміжку , - точка мінімуму.

Якщо , то функція зростає на проміжку  і спадає на проміжку , - точка максимуму.

5. Графік функції перетинає осі координат у точках , де .

6. Графіком функції є ***парабола***, вітки якої напрямлені на вгору, якщо , і вниз, якщо ; координати вершин - ; вісь симетрії графіка - .

**Степенева функція**

Функція виду  називається ***степеневою***.

**Властивості функції , де .**

1. Область визначення – *R*.

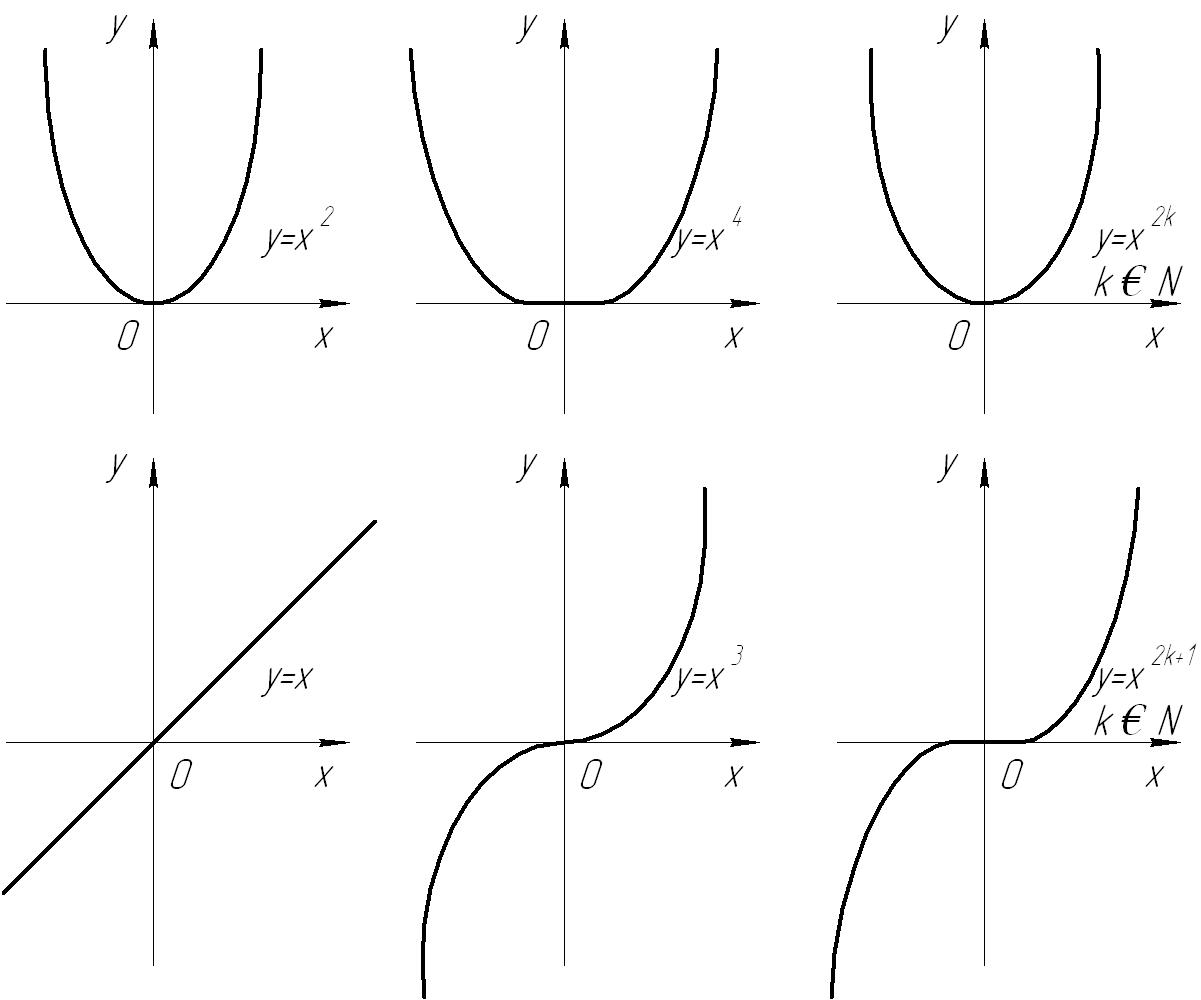
2. Область значень: якщо , то ; якщо , то .

3. Якщо , то функція парна; якщо , то функція непарна.

4. Графік функції проходить через початок координат.

Графік функції симетричний відносно осі , якщо ; відносно початку координат – якщо .

5. Якщо , то функція спадає на проміжку  і зростає на проміжку . Якщо , то функція зростає на множині *R*.



**Числові множини. Дійсні числа.**

**Практичне заняття**

*Мета: навчитися виконувати дії над множинами; ознайомитися з поняття границі послідовності.*

***Контрольні питання:***

1. Сформулювати означення числової множини.
2. Які є дії над множинами?
3. Яка множина називається універсальною?
4. Сформулювати означення функції.
5. Які є види функцій?
6. Яка функція називається елементарною?
7. Що називається границею послідовності?

***Задачі***

1. Вказати всі елементи наступних множин:

а) - буква слова «економічний»};

б) - буква слова «менеджмент»};

в) - парне ціле число, менше 10, };

г) - дільник числа 20};

д) - корінь рівняння };

1. Виконати дії для множин із завдання 1:

а) 

б) 

в) Ø;

г) Ø;

д) 

3. Задано універсальну множину  її підмножини 

Виконайте завдання:

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

***Завдання для самостійної роботи***

1. Вказати всі елементи наступних множин:

а) - буква слова «інститут»};

б) - одна з цифр числа 130125};

в)  - одна з букв слова «студент»};

г) - непарне ціле число, менше 11, > 0};

д) - дільник числа 15}.

2. Виконати дії для множин із завдання 1.

а) ØØ;

б) Ø;

в) ;

г) ;

д) 

3. Задано універсальну множину  та підмножини 



Виконати завдання:

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

4. Знайти границю послідовності 

**Теорія границь.**

**Практичне заняття.**

*Мета: опанувати методи знаходження границь функцій; навчитися розкривати невизначеності; ознайомитися із застосуванням чудових границь.*

***Контрольні питання:***

1. Дати означення неперервності функції в точці.
2. Навести властивості неперервності функцій.
3. Дати означення границі функції.
4. Дати означення нескінченно малих та нескінченно великих функцій.
5. Навести властивості границь функцій.
6. Які границі називають першою та другою чудовими границями?

***Задачі:***

1. Обчислити границю 
2. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу 

1)  2)  3) 

3. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу 

1)  2)  3) 

4. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональностей:

1)  2) 

5. Обчислити границю 

6. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу чудову границю:

1)  2)  3) 

7. Обчислити границі функцій, застосовуючи другу чудову границю:

1)  2)  3) 

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти границі функцій:

1)  2)  3) 

2. Знайти границі функцій:

1)   2)  3)  

1. Знайти границі функцій:

1)   2)  

1. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу чудову границю:

1)  2)  

1. Обчислити границі функцій, застосовуючи другу чудову границю:

1)  2) 

**Похідна та її обчислення.**

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти похідні функцій:

1)  2)  3)  4)  5) 

2. Знайти похідні функцій:

1)  2).  3).  4).  5). 

3. Знайти похідні функцій, застосовуючи правила диференціювання:

1).  2) 

3); 4) ; 5)

4. Знайти похідні тригонометричних функцій:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) ;

7) ; 8) ; 9) ;

10) ; 11) ;

12) ; 13) .

5. Знайти похідні обернених тригонометричних функцій:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) .

1. Знайти похідні показникових та логарифмічних функцій:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) ;

8) ; 9) ; 10) .

1. Знайти похідні функцій:

1) ; 2) ; 3) ;

4)  ; 5) .

1. Знайти похідні функцій:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) ;

7) ; 8) ; 9) .

9. Нехай функція  виражає залежність витрат виробництва від кількості *х* випущеної продукції. Знайти граничні витрати виробництва і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції становить 100 од., 20 од.

10. Залежність між витратами виробництва *у* і обсягом випущеної продукції *х* виражається функцією (грош.од.). Визначити середні й граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

**Похідні та диференціали вищих порядків. Застосування похідної.**

**Практичне заняття.**

*Мета: засвоїти поняття диференціала функцій та правил диференціювання; опанувати техніку обчислення похідних вищих порядків, навчитися застосовувати правило Лопіталя, опанувати техніку дослідження функцій однієї змінної; ознайомитися з дослідженням функцій в економіці.*

***Контрольні питання:***

1. Дати означення похідної функції.
2. Який економічний зміст має похідна функції?
3. Які існують правила знаходження похідної функції?
4. Що таке приріст функції?
5. Дати означення диференціала функції.
6. Які ви знаєте правила диференціювання?
7. Навести формулу застосування диференціала функції до наближення обчислень?
8. Що таке абсолютна похибка?
9. Що таке відносна похибка?
10. У чому полягає правило Лопіталя?
11. Дати означення другої похідної, третьої похідної, похідної порядку *n*.
12. Сформулювати необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.
13. Які точки називаються точками екстремуму?
14. Які точки називаються критичними?
15. Сформулювати достатні умови екстремуму.
16. Дати означення опуклого і вгнутого графіка функції.
17. Сформулювати достатні умови опуклості графіка функції.
18. Дати означення точки перегину.
19. Що називається похилою асимптотою графіка функції? Як знаходять похилі асимптоти?
20. Навести загальну схему дослідження функцій і побудови їх графіків.

***Задачі:***

1. Знайти похідні складних функцій:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) .

2. Знайти диференціали функцій:

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

3. Знайти похідну третього порядку функції .

4. Знайти похідну четвертого порядку функції .

5. Знайти похідну п`ятого порядку функції .

6. Знайти похідні другого порядку функцій:

1) ; 2) ; 3) .

7. Обчислити границі функцій за правилом Лопіталя:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) .

8. Дослідити функцію на екстремум.

9. Виробник реалізує свою продукцію за ціною *p* за одну одиницю. Витрати виробництва задаються залежністю , де *х* – обсяг продукції, *а*, *b* – деякі коефіцієнти, *а* > 0, *b* > 0. Знайти оптимальний для виробництва обсяг продукції та відповідний йому прибуток.

10. Дослідити на опуклість графік функції .

11. Дослідити функцію та побудувати її графік.

***Завдання для практичної роботи:***

1. Написати рівняння дотичної до графіка функції у точці *х* = 1. Зробити схематичний рисунок.

2. Написати рівняння дотичної до графіка функції  у точці :

1) ; 2) ; 3) .

3. Обчислити наближено:

1) ; 2); 3) .

4. Обчислити наближено . Оцінити точність результату.

5. Обчислити:

1) ; 2) ; 3) .

6. Дослідити на екстремум функції:

1) ; 2) .

1. Дослідити на опуклість графік функції

.

1. Знайти асимптоти графіка .
2. Дослідити функцію  та побудувати її графік.
3. Дослідити функцію та побудувати її графік.
4. Обчислити наближено:

1) ; 2) .

12. Знайти приріст функцій та її диференціал при *х* = 10 і Δ*х* = 0,1, якщо . Обчислити абсолютну та відносну похибки, які мають при заміні приросту функції диференціалом.

13. Капітал в 1 млн гривень можна покласти у банк під 50% річних, або вкласти у виробництво з ефективністю 100%; витрати виробництва задаються квадратичною залежністю. Прибуток обкладається податком *b* %. При якому *b* вкладення капіталу у виробництво є більш ефективним ніж розміщення капіталу в банк?

14. Знайти асимптоти графіка функції .

15. Розв`язати задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функція прибутку якої може бути змодельована залежністю .

**Функції кількох змінних та їх застосування.**

**Практичне заняття.**

*Мета: засвоїти поняття функції багатьох змінних, опанувати техніку знаходження частинних похідних, засвоїти поняття повного диференціала функцій багатьох змінних та навчитися застосовувати диференціал до наближених обчислень, досліджувати екстремум функцій багатьох змінних.*

***Контрольні питання:***

1. Дати означення функції багатьох змінних.
2. Навести функцію Кобба-Дугласа.
3. Що таке лінія рівня функції двох змінних?
4. Яка функція двох змінних називається неперервною?
5. Що таке повний приріст функції двох змінних?
6. Що називається частинною похідною функції  по аргументу *х*?
7. Що називається частинною похідною функції по аргументу *у*?
8. Що називається градієнтом функції ?
9. Дати означення повного диференціала функції .
10. Чим відрізняються поняття точки локального максимуму і точки глобального максимуму?
11. Яка точка називається критичною для функції ?
12. Навести необхідні умови існування екстремуму функції .
13. Навести достатні умови екстремуму функції двох змінних.
14. Навести рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні у точці .

***Задачі:***

1. Знайти область визначення функції

.

1. Знайти частинні похідні та функцій:

1). ; 2). Кобба-Дугласа: ;

3). ; 4). ; 5). ; 6). .

1. Знайти градієнт функції у точці (4;1).
2. Знайти повний диференціал функцій:

1)  ; 2) ; 3) .

5. Обчислити наближено , виходячи зі значення функції при *х* =1, *у* =1.

6. Дано . Знайти 

7. Дано . Знайти .

8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні  у точці *М*(1;1;3).

9. Знайти екстремуми функцій:

1) ; 2).

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти частинні похідні  та  функцій:

1) ; 2) .

2. Знайти повний диференціал функції .

3. Обчислити наближено , виходячи зі значення функції при *х* = 1, *у* = 0.

4. Знайти екстремуми функції .

5. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні  у точці .

6. Для випуску деякого товару визначено виробничу функцію , де *х*, *у* – чинники виробництва. Визначити закон зміни виробничої функції .

7. Фірма виробляє два види товарів *А* і *В* та продає їх за ціною 1000 грош.од. і 800 грош.од. відповідно. Функція витрат має вигляд , де *Х* і *У* – обсяги випуску товарів.

Знайти такі значення *Х* і *У*, щоб прибуток, отриманий фірмою, був максимальним. Визначити цей прибуток.

8. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, а решту поставляє на експорт. Зв`язок ціни товару  і його кількості , проданого на внутрішньому ринку, описується кривою попиту, рівняння якої



Аналогічно для експорту  і кількість  також зв`язані співвідношенням (рівняння кривої попиту)



Сумарні витрати визначаються виразом



Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальним?

***Приклади розв`язування задач:***

1. Знайти:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) .

*Розв`язання:*

а) Границя чисельника та знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність  .

.

.

Отже, теорему про границю частки застосувати не можна. Але поблизу точки   , і тому дріб можна скоротити на , тобто

.

Останній вираз має зміст при всіх значеннях , тому

.

Отже, можна застосовувати теорему про границю суми:

.

б) У цьому випадку ні чисельник, ні знаменник не мають границі, тому що обидва необмежено зростають . Але якщо попередньо перетворити аналітичний вираз під знаком границі, поділивши чисельник і знаменник на , то отримаємо

.

в) При безпосередній підстановці *х* = 1 матимемо невизначеність . Це означає, що в чисельнику та знаменнику є множник (*х*-1), який перетворює їх в нуль.

Поділивши чисельник на (*х*-1) за правилом ділення многочленів, побачимо що його можна записати у вигляді . Щоб виділити множник (*х*-1) у знаменнику, помножимо знаменник і чисельник на спряжений йому вираз:



г) 

оскільки кожний із двох останніх співмножників є границею типу , яка дорівнює одиниці.

д) Границя виразу, який стоїть у дужках,

.

Показник степеня прямує до нескінченності, тобто маємо невизначеність , тому потрібно застосувати другу особливу границю . Для цього перетворимо вираз:



2. Знайти похідну функцій:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

*Розв`язання:*

а) Покладемо , де *u* = 1 + ln*x*. Тоді за правилом диференціювання складної функції маємо:

.

б) Запишемо функцію у вигляді

.

Позначимо , тоді .

Маємо



в) Запишемо функцію у вигляді 



г) Маємо



3. Дослідити функцію  та побудувати її графік.

*Розв`язання:*

а) Область визначення функції , тобто функція існує при всіх значеннях.

б) Парність, періодичність:

Функція загального виду, ні парна, ні непарна, неперіодична.

в) Точки перетину з осями координат:

З віссю 

Легко перевірити, що є коренем рівняння, тому



Знайдемо дві інші точки перетину графіка з віссю *ОХ*:





Точки перетину графіка з віссю *ОХ* – *А*(1;0), *В*(-4,37;0), *С*(9,37;0); точка перетину графіка з віссю *ОY* (х=0) – *D*(0;41).

г) Інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму:

Тоді - критичні точки.

Дані заносимо в таблицю:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* |  | -2 | (-2;6) | 6 |  |
|  | + | 0 | - | 0 | + |
|  | (зростає) | 81 | (спадає) | -175 | (зростає) |

Точка максимуму функції *М*(-2;81), точка мінімуму *N*(6;-175).

д) Точка перегину, інтервали опуклості та вгнутості:

, ,  -

критична точку другого роду.

Дані заносимо в таблицю:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *х* |  | 2 |  |
|  | - | 0 | + |
|  | (опукла) | -47 | (вгнута) |

Точка перегину *Е*(2;-47).

е) Асимптоти. Вертикальної асимптоти немає, оскільки функція є неперервною.

Дослідимо функцію на горизонтальну асимптоту:

.

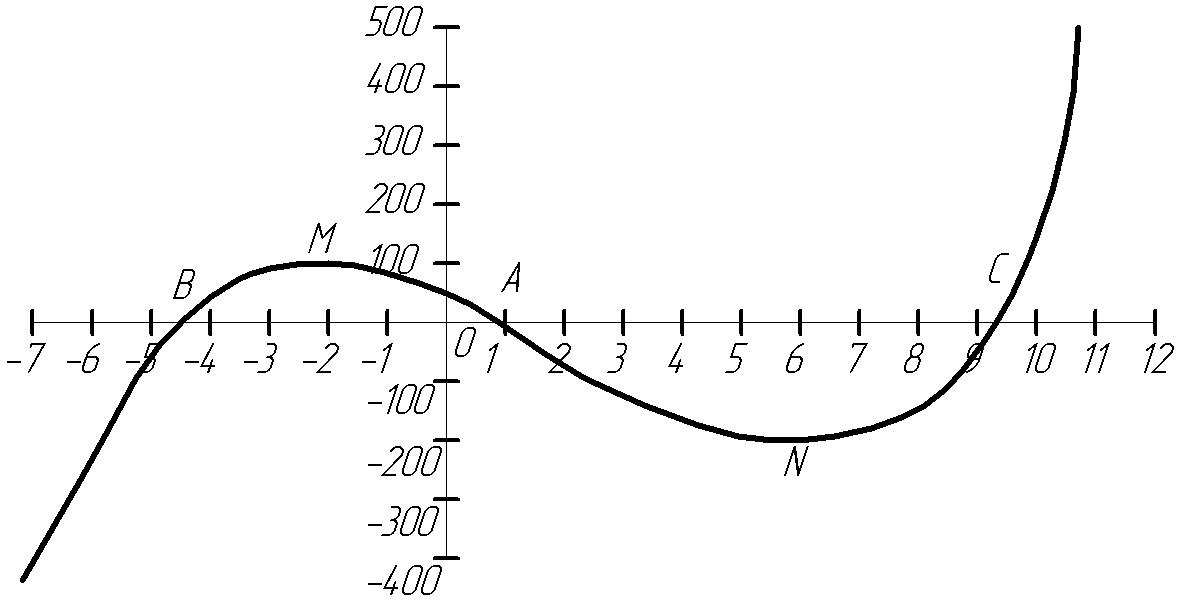
Отже, горизонтальної асимптоти немає.

Похила асимптота має вигляд , де а 

В даному випадку . Похилої асимптоти немає.

Отже, функція не має асимптот.

Використовуючи здобуті дані, будуємо графік функції.



**КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2**

***Завдання І:***

Знайти границі функцій:

1. ; .

2. ; .

3. .

4. ; .

5. ; .

6. .

7. ; .

8. ; .

9. .

10. ; .

11. ; .

12. .

13. ; .

14. ; .

15. .

16. ; .

17. ; .

18. .

19. ; .

20. ; .

21. .

22. ; .

23. ; .

24. .

25. ; .

26. ; .

27. .

28. ; .

29. ; .

30. .

***Завдання ІІ:***

Знайти похідні функцій:

1. .

2. .

3. .

4. .

5. .

6. .

7. .

8. .

9. .

10. .

11. .

12. .

13. .

14. .

15.  .

16. .

17. .

18. .

19. .

20. .

21. .

22. .

23. .

24. .

25. .

26. .

27. .

28. .

29. .

30. .

***Завдання ІІІ:***

Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік:

1. .

2. .

3. .

4. .

5. .

6. .

7. .

8. .

9. .

10. .

11. .

12. .

13. .

14. .

15. .

16. .

17. .

18. .

19. .

20. .

21. .

22. .

23. .

24. .

25. .

26. .

27. .

28. .

29. .

30. .

**ІНТЕГРАЛИ.**

**Невизначені інтеграли.**

**Практичне заняття.**

*Мета: засвоїти поняття первісної та невизначеного інтеграла, опанувати техніку обчислення інтегралів за допомогою таблиці та методом заміни змінної, набути навичок підбору підстановок та підведення функції під знак диференціала, засвоїти формулу інтегрування частинами, навчитися виділяти під інтегралом множники* ***u*** *та* ***dv****, опанувати техніку обчислення інтегралів від раціональних функцій.*

***Контрольні питання:***

1. Що таке первісна функції, які її властивості?
2. Сформулювати достатні умови існування первісної.
3. Дати означення невизначеного інтеграла. Які його властивості?
4. Навести теорему про заміну змінної у невизначеному інтегралі.
5. Скільки первісних має функція *f* (*х*) на проміжку і чим вони відрізняються одна від одної? Навести приклад двох різних первісних для функції .
6. Чи завжди первісна функція є елементарною? Навести приклади функцій, інтеграли від яких не є елементарними функціями.
7. Навести формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
8. Які умови повинні задовольняти функції *и*(*х*) та *v*(*x*) у формулі інтегрування частинами?
9. Яка функція називається раціональною?
10. Дати означення цілої та дробової раціональних функцій, правильного та неправильного раціонального дробу.
11. Які дроби називаються елементарними?
12. Сформулювати теорему про розклад многочленна з дійсними коефіцієнтами на множники.
13. Сформулювати теорему про розклад правильного раціонального дробу на елементарні.

***Задачі:***

1. Обчислити інтеграли: 1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ; 6) ; 7)  і перетворити диференціюванням одержаний результат.

2. Обчислити інтеграли: 1) ; 2) ; 3) ; 4) .

3. Знайти первісну для функції , яка в точці набуває значення, що дорівнює 6.

4. Обчислити інтеграли: 1) ; 2) ; 3) ; 4) .

5. Обчислити інтеграли: 1) ; 2) ;

3) .

6. Обчислити інтеграли: 1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ; 6) ; 7) ; 8) ; 9) .

7. За допомогою формули інтегрування частинами обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

8. Розкласти на елементарні дробі:

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

9. Виділити цілу частину дробі .

10. Обчислити інтеграли від елементарних дробів:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) .

11. Обчислити інтеграл від раціональних функцій:

1) ; 2) ; 3).

***Завдання для практичної роботи:***

1. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) .

1. Методом заміни змінної обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) ; 8) .

3. За допомогою формули інтегрування частинами обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) ; 8) .

4. Зінтегрувати елементарні дроби:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) .

5. Обчислити інтеграли:

1)  ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

**Практичне заняття.**

*Мета: опанувати техніку обчислення інтегралів від функцій за допомогою універсальної та інших підстановок; навчитися правильно вибирати підстановку в інтегралах від лінійних, дробово-лінійних і квадратичних ірраціональностей, яка дозволяє позбутися від ірраціональності й обчислити інтеграл, а також опанувати техніку інтегрування диференціальних біномів.*

***Контрольні питання:***

1. Яку підстановку слід робити в інтегралах типу.

,

де *R* – раціональна функція своїх аргументів?

1. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу

?

1. Як обчислюються інтеграли типу

*dx*?

1. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу

 ?

1. Якою підстановкою обчислюється інтеграли типу

?

1. Якою підстановкою обчислюються інтеграли типу

?

1. Наведіть теорему Чебишева про інтегрування диференціального бінома

.

8. Якою підстановкою інтеграли типу  у загальному випадку зводяться до інтегрування раціональних функцій?

9. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність ?

10. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність ?

11. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність ?

***Задачі:***

1. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) .

2. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) .

3. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) .

4. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) .

5. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

***Завдання для практичної роботи:***

1. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) .

2. Обчислити інтеграли:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) .

**Визначені інтеграли та їх застосування.**

**Практичне заняття .**

*Мета: навчитися обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца, засвоїти методи заміни змінної та інтегрування частинами у визначених інтегралах.*

***Контрольні питання:***

1. Навести геометричний зміст визначеного інтеграла.
2. Сформулювати достатні умови інтегрованості функції.
3. Навести формулу заміни змінної у визначеному інтегралі. За яких умов ця формула має місце?
4. Навести формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Навести формулу інтегрування частина визначеного інтеграла.
6. Вияснити (не обчислюючи), якій з інтегралів більший:

 чи ?

***Задачі:***

1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

1) ; 2) ; 3) ; 4); 5) .

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу заміни змінної:

1) ; 2); 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) .

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

4. Знайти обсяг продукції, випущеної за 5 років, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд .

5. За даними дослідження, у розподілі прибутку в одній із країн крива Лоренцо може бути описана рівнянням , де *х* – частка населення, *у* – частка прибутку населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

6. Визначити дисконтний прибуток за три роки при процентний ставці 8%, якщо базові капіталовкладення становили 10 млн гривень, а очікуване зростання капіталу – 1млн гривень

7. Знайти середній час, що затрачений на освоєння випуску одного виробу, в період освоєння від 10 до 20 виробів, якщо затрата часу на 1-й виріб *а* = 200 хв, показник виробничого процесу .

***Завдання для практичної роботи:***

1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу заміни змінної:

1); 2) ; 3) .

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) .

**Практичне заняття.**

*Мета: ознайомитися з практичним застосуванням визначеного інтеграла; навчитися обчислювати площі плоских фігур та об`єми тіл обертання.*

***Контрольні питання:***

1. Навести приклад використання поняття визначеного інтеграла в економіці.
2. Як обчислюються площі плоских фігур?
3. Як обчислюються об`єми тіл обертання?

***Задачі:***

1. Нехай функція описує зміну продуктивності праці деякого підприємства за певний час. Знайти обсяг продукції, випущеної за проміжок часу .

2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями



3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями



4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями



5. Знайти площу фігури, обмеженої лініями



1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями



7. Обчислити об`єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями  навколо осі *0х*.

8. Обчислити об`єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями , навколо осі *0х*.

9. Обчислити об`єм тіла, що отримане обертанням фігури, обмеженої лініями , навколо осі *0у*.

10. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за другу годину роботи, якщо продуктивність праці характеризується функцією .

11. Комп`ютер коштує 2 тис.грош.од. Прибуток від виконаної на комп`ютері роботи визначається функцією , де *t* – час (років), *s* – прибуток (тис.грош.од.). Через який час покриються витрати на придбання комп`ютера?

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) ;

7) .

2. Обчислити об`єм тіла, що отримане оберненням фігури, обмеженої лініями , навколо осі *0х*.

3. Обчислити об`єм тіла, що отримане оберненням фігури, обмеженої лініями , навколо осі *0х*.

4. Обчислити об`єм тіла, що отримане оберненням фігури, обмеженої лініями , навколо осей *0х* та *0у*.

5. Визначити запас товару на складі, що утвориться за 2 дні, якщо надходження товарів характеризується функцією .

6. Енергозберігаюче обладнання коштує 75 тис.грош.од. Заощадження від використання такого обладнання визначається функцією , де *t* – час (років), *s* – заощадження (тис.грош.од.). Через який час фірма покриває витрати на придбання обладнання?

***Приклади розв`язування задач:***

1. Обчислити невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням:

а). ;

б). ;

в). ;

г). .

*Розв`язання:*

а) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

.

П е р е в і р к а :

.

б) Обчислимо інтеграл методом заміни змінної:

.

П е р е в і р к а :

.

в). Застосуємо формулу інтегрування частинами :

.

П е р е в і р к а :

.

г) Використаємо метод інтегрування раціональних дробів. Для цього представимо підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

.

Прирівнюємо чисельники дробів правої та лівої частин:

.

Нехай *х* = 1, тоді 4*А* = 8, *А* = 2;

*х* = 0, тоді 3*А* – *С* = 10, *С* = - 4;

*х* = 2, тоді 7*А* +2*В*+ *С* = 8, *В* = - 1.

Отже, 

.

П е р е в і р к а:



2. Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної .

*Розв`язання:*

.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  та .

*Розв`язання:*

а) Побудуємо параболу. Для цього знайдемо координати її вершини:

, .

Отже, *А*(2;9) – вершина параболи.

Знайдемо координати точок перетину параболи з віссю *ОХ*: *у* = 0, тобто

.

Корені цього рівняння: .

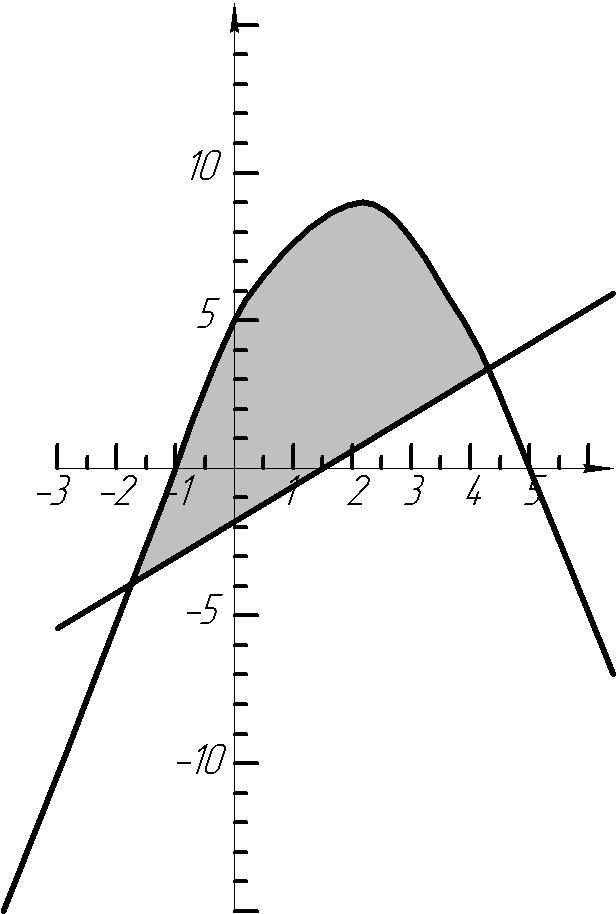
Таким чином, *D*(-1;0) і *F*(5;0) – точки перетину параболи з віссю *ОХ*.

б) Побудуємо пряму. Для цього знайдемо точки перетину її з осями координат:

та *С*(0;-3).

Побудуємо рисунок (рис. 1).

Рис. 1.



в) Для знаходження меж інтегрування знайдемо точки перетину параболи та прямої. Для цього розв`язуємо систему рівнянь:



Тобто 

г) Обчислюємо шукану площу за формулою:



де 



**КОНТРОЛЬНА РОБОТА 3.**

***Завдання І:***

Знайти невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25. 

26. 

27. 

28. 

29. 

30. 

***Завдання ІІ:***

Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25. 

26. 

27. 

28. 

29. 

30. 

***Завдання ІІІ:***

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  та . Зробити рисунок.

1.  

2.  

3.  

4.  

5.  

6.  

7.  

8.  

9.  

10.  

11.  

12.  

13.  

14.  

15.  

16.  

17.  

18.  

19.  

20.  

21.  

22.  

23.  

24.  

25.  

26.  

27.  

28.  

29.  

30.  

**ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.**

**Диференціальні рівняння першого порядку.**

**Практичне заняття.**

*Мета: навчитися розв`язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні диференціальні рівняння, лінійні диференціальні рівняння першого порядку методом Лагранжа і методом Бернуллі, а також рівняння в повних диференціалах.*

***Контрольні питання:***

1. Що називається загальним розв`язком диференціального рівняння?
2. Що називається частинним розв`язком диференціального рівняння?
3. Навести теорему Коші про існування та єдність розв`язку.
4. Як знайти загальний розв`язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
5. Яке диференціальне рівняння називається однорідним?
6. Якою заміною можна звести однорідне диференціальне рівняння з відокремленими змінними?
7. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?
8. У чому полягає метод Лагранжа?
9. У чому полягає метод Бернуллі?
10. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням у повних диференціалах?

***Задачі:***

1. Знайти загальний розв`язок рівняння з відокремлюваними змінними:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

2. Знайти частинний розв`язок рівняння , що задовольняє умову .

3. Знайти загальний розв`язок однорідного рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) .

4. Сумарний прибуток фірми описується функцією , де *х* – кількість виробленої продукції. Граничний прибуток фірми відповідає функції . Якою буде функція сумарного прибутку фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток?

5. Розв`язати рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) .

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти загальний розв`язок рівняння з відокремлюваними замінними:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

2. Знайти частинний розв`язок рівняння , що задовольняє умову .

3. Знайти загальний розв`язок однорідного рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

4. Виторг від продажу *х* одиниць товару описується функцією *u*(*x*). Граничний виторг відповідає функції . Яким буде виторг за продану продукцію, якщо виторг від продажу 100 одиниць продукції дорівнює 40000 грош.од.?

5. Нехай попит і пропозиція товару визначаються співвідношенням



де *p* – ціна товару, - тенденція формування ціни. Нехай також у початковий момент часу ціна за одиницю товару становила 1 грош.од. Виходячи з вимоги відповідності попиту і пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

6. Розв`язати рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) .

**Диференціальні рівняння другого порядку.**

**Практичне заняття .**

*Мета: засвоїти методи розв`язування лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

***Контрольні питання:***

1. Яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку називається однорідним?
2. Яке рівняння називається неоднорідним?
3. Який вигляд має загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні?
4. Який вигляд має загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні?
5. Який вигляд має загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння комплексні?
6. Яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку називається неоднорідним?
7. Як пов`язаний загальний розв`язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із загальним розв`язком відповідного однорідного рівняння та частинним розв`язком неоднорідного?

***Задачі:***

1. Знайти загальний розв`язок рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

2. Розв`язати рівняння .

3. Знайти частинний розв`язок рівняння

; .

4. Знайти частинний розв`язок рівняння

;.

5. Розв`язати рівняння .

6. Знайти частинний розв`язок рівняння

; .

7. Розв`язати рівняння .

8. Розв`язати рівняння .

9. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношенням

, ,

де - ціна товару, - тенденція формування ціни, - темп зміни ціни. Нехай також у початковий момент часу . Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

***Завдання для практичної роботи:***

1. Знайти загальний розв`язок рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

2. Знайти частинний розв`язок рівняння

; .

3. Розв`язати рівняння:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) ;

7) .

4. Знайти частинний розв`язок рівняння

; 

5. Знайти частинний розв`язок рівняння

; 

6. Знайти залежність ціни *p* і попиту *q* від часу *t*, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями:



***Приклади розв`язування задач:***

1. Розв`язати рівняння з відокремлюваними змінними



*Розв`язання:*

Запишемо дане рівняння у вигляді



Поділивши обидві частини цього рівняння на добуток , дістанемо рівняння з відокремленими змінними

.

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо



.

Звідси .

1. Розв`язати лінійне рівняння першого порядку методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)



*Розв`язання:*

Розглянемо однорідне рівняння Функція  є розв`язком цього рівняння. Інші його розв`язки знайдемо, відокремлюючи змінні: . Звідси знаходимо



Розв`язок  можна дістати з останньої формули при , тому всі розв`язки однорідного рівняння визначаються рівністю . Розв`язки вихідного рівняння шукаємо у вигляді  Підставивши цей вираз у дане рівняння, дістанемо







де  - довільна стала.

Розв`язки заданого рівняння мають вигляд



3. Розв`язати лінійне рівняння першого порядку методом Бернуллі



*Розв`язання*:

Розв`язок шукаємо у вигляді  Маємо 

Функцію виберемо так, щоб 





Нехай, наприклад, *С* = 1, тоді 

Тоді для функції дістанемо рівняння 

Отже, всі розв`язки заданого рівняння визначаються формулою



або



4. Знайти загальні розв`язки лінійних однорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

*Розв`язання:*

а) Складемо відповідне характеристичне рівняння

.

Коренями даного рівняння є числа 

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то фундаментальну систему розв`язків утворюють функції 

Отже, загальний розв`язок рівняння має вигляд



б) Складемо відповідне характеристичне рівняння



Коренями даного рівняння є числа 

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то фундаментальну систему розв`язків утворюють функції 

Отже, загальний розв`язок рівняння має вигляд



в) Складемо відповідне характеристичне рівняння

.

Коренями даного рівняння є числа 

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні кратності два, то фундаментальну систему розв`язків утворюють функції 

Отже, загальний розв`язок рівняння має вигляд



г) Складемо відповідне характеристичне рівняння

.

Коренями даного рівняння є числа 

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексні, то фундаментальну систему розв`язків утворюють функції 

Отже, загальний розв`язок рівняння має вигляд



5. Розв`язати задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами ; 

*Розв`язання:*

Загальний розв`язок даного рівняння має вигляд

 (див. задачу 4,а).

Знайдемо :



 .

Отримали систему рівнянь



Звідки 

Отже, розв`язок задачі Коші має вигляд:



**КОНТРОЛЬНА РОБОТА 4.**

***Завдання І:***

Розв`язати рівняння з відокремлюваними змінними:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

25. 

26. 

27. 

28. 

29. 

30. 

***Завдання ІІ:***

Розв`язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. ;

6. ;

7. ;

8. ;

9. ;

10. ;

11. ;

12. ;

13. ;

14. ;

15. ;

16. ;

17. ;

18. ;

19. ;

20. ;

21. ;

22. ;

23. ;

24. ;

25. ;

26. ;

27. ;

28. ;

29. ;

30. .

***Завдання ІІІ:***

Розв`язати задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № варіанта | *p* | *q* | *a* | *b* |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | -4 | 4 | 0 | 2 |
| 3 | 2 | 0 | 6 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | -1 | 3 |
| 5 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 6 | -4 | 4 | 0 | 0 |
| 7 | 6 | 13 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | -2 | 1 |
| 9 | 2 | 5 | -1 | -2 |
| 10 | -4 | 8 | 2 | 7 |
| 11 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 12 | -4 | 4 | 0 | 2 |
| 13 | 2 | 0 | 6 | 1 |
| 14 | 0 | 1 | -1 | 3 |
| 15 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 16 | -4 | 4 | 0 | 0 |
| 17 | 6 | 13 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 1 | -2 | 1 |
| 19 | 2 | 5 | -1 | -2 |
| 20 | -4 | 8 | 2 | 7 |
| 21 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 22 | -4 | 4 | 0 | 2 |
| 23 | 2 | 0 | 6 | 1 |
| 24 | 0 | 1 | -1 | 3 |
| 25 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 26 | -4 | 4 | 0 | 0 |
| 27 | 6 | 13 | 0 | 0 |
| 28 | 0 | 1 | -2 | 1 |
| 29 | 2 | 5 | -1 | -2 |
| 30 | -4 | 8 | 2 | 7 |

**Питання для самоперевірки.**

1. Дати означення матриці та її розміру. Які існують різновиди матриць?

2. Які елементи утворюють головну та побічну діагоналі матриці?

3. Як помножити матрицю на дійсне число, знайти алгебраїчну суму матриць, добуток матриць?

4. Чи завжди добуток матриць має властивість комутативності?

5. За якими правилами обчислюють визначники 2-го, 3-го, та n-го порядків?

6. Як визначають і знаходять мінор та алгебраїчне доповнення елемента *аij* матриці *А?*

7. Сформулювати властивості визначника.

8. Як визначають та позначають матрицю, обернену до матриці *А?*

9. За яких умов існує обернена матриця?

10. Які ви знаєте способи знаходження оберненої матриці?

11. Які величини називають сталими, а які змінними?

12. Назвати способи завдання функцій.

13. Що таке область визначення та область значень функції?

14. Побудуйте ескізи графіків основних елементарних функцій.

15.Який існує зв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою величинами?

16. Дати означення границі послідовності та границі функції.

17. Яка геометрична інтерпретація означення границі послідовності?

18. Назвати деякі методи розкриття невизначеностей типу для алгебраїчних функцій.

19. Навести першу та другу особливі границі. Які їх наслідки?

20. Як визначають число *е*? Де його застосовують?

21. Пояснити, що таке приріст аргументу та функції.

22. Дати означення неперервності функції в точці і на відрізку.

23. Які існують розриви функцій?

24. Чим відрізняється ліквідований розрив від неліквідованого?

25. Який геометричний, механічний, економічний зміст має похідна функції?

26. Дати означення похідної функції.

27. Які існують правила знаходження похідної функції? 18. Як знайти похідну складної функції?

29. Як знайти похідну другого, третього та вищих порядків?

30. Що таке диференціал функції?

31. Сформулювати правило Лопіталя.

32. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?

33. Як визначити інтервали монотонності функції?

34. Як знайти максимум і мінімум функції?

35. Які необхідні та достатні умови існування екстремуму функції?

36. Назвати необхідні та достатні умови існування точки перегину функції?

37. Які ознаки опуклості та вгнутості кривої?

38. Яка пряма називається асимптотою кривої?

39. Навести загальну схему дослідження функції та побудови її графіка.

40. Дати означення вектора. Чим відрізняються векторні величини від скалярних?

41. Які вектори називаються рівними, колінеарними, протилежними, компланарними?

42. Що таке орт?

43. Як записати розклад вектора за ортами (базисом) прямокутної декартової системи координат?

44. Як знайти суму та різницю двох векторів?

45. Як знайти проекцію вектора на вісь, кут між вектором і віссю?

46. Як визначити координати вектора, якщо відомі координати початку та кінця вектора?

47. Навести правила знаходження алгебраїчної суми векторів і множення вектора на число, якщо відомі координати векторів. Як знайти модуль вектора?

48. Дати означення скалярного добутку векторів.

49. Чому дорівнює скалярний добуток векторів *,* якщо:

а) та колінеарні й однаково напрямлені;



б) та протилежні;



в) та перпендикулярні;



г) та рівні?



50. Як знайти відстань між двома точками із заданими координатами?

51. Як знайти координати середини відрізка, коли відомі координати початку та кінця відрізка?

52. Які є види рівнянь на площині?

53. Записати:

а) загальне рівняння прямої;

б) канонічне рівняння прямої;

в) рівняння прямої у відрізках;

г) рівняння прямої, що походить через дві задані точки;

д) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Навести умови паралельності та перпендикулярності прямих.

54. Чи можна від одного виду рівняння прямої перейти до іншого? Показати це на прикладі переходу від загального рівняння прямої до рівняння прямої з кутовим коефі­цієнтом.

55. Як знайти кут між двома прямими та відстань від заданої точки до прямої?

56. Записати загальне рівняння площини у просторі.

57. Навести канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

58. Записати рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки.

59. Як знайти відстань від точки до площини, заданої загальним рівнянням?

60. Які лінії називають кривими другого порядку?

61. Записати канонічні рівняння:

а) кола;

б) еліпса;

в) гіперболи;

г) параболи.

62. Дати означення первісної та невизначеного інтеграла.

63. Як пов'язані операції інтегрування та диференці­ювання функції?

64. Назвати основні властивості невизначеного інтеграла.

65. Навести таблицю основних інтегралів.

66. Які існують методи інтегрування?

67. Записати формулу інтегрування частинами. Як вона отримана?

68. Пояснити, як інтегрувати раціональний дріб.

69. Як правильний дріб представити у вигляді суми найпростіших дробів?

70. Які задачі приводять до поняття визначеного и інтеграла? Дати означення визначеного інтеграла.

71. Який зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами?

72. Навести основну формулу інтегрального числення (формулу Ньютона—Лейбніца).

73. Назвати основні властивості визначеного інтеграла.

74. Записати формулу інтегрування частинами для ми кінченого інтеграла.

75. Чим відрізняється метод заміни змінної для визначеного інтеграла від цього ж методу для невизначеного інтеграла?

76. Навести приклади геометричних та економічних застосувань визначеного інтеграла.

77. Дати означення звичайного диференціального рівняння.

78. Як визначити порядок диференціального рівняння?

79. Дати означення загального та частинного розв'язків диференціального рівняння.

80. Пояснити, що таке задача Коші.

81. Як знаходити розв'язки диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними?

82. Які диференціальні рівняння називають лінійними?

83. Знайти загальний розв'язок:

а) лінійного однорідного рівняння, тобто ;

б) лінійного неоднорідного рівняння, тобто 

84. Що таке числовий ряд з додатковими членами.

85. Сформулювати необхідну та достатні ознаки збіжності числового ряду.

86. Який ряд називається функціональним?

87. Ознаки збіжності функціонального ряду.

88. Дати визначення степеневого ряду.

89. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.

**ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЗАЛІКУ**

1. Матриці. Дії над матрицями.

2. Транспонування матриці. Обернена матриця.

3. Обчислення оберненої матриці.

4. Визначники. Обчислення визначників другого та третього порядку.

5. Властивості визначників та їх обчислення.

6. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера.

7. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

8. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

9. Вектори та їх властивості.

10. Добутки векторів.

11. Базис і розмірність лінійного простору.

12. Координати вектора у заданому базисі.

13. Дослідження лінійної залежності.

14. Ранг матриці.

15. Мінори й алгебраїчні доповнення.

16. Рівняння прямої на площині.

17. Рівняння прямої у просторі.

18. Рівняння площини.

19. Криві другого порядку.

20. Пoняття функціональної залежності.

21. Основні види функцій. Властивості функцій.

22. Основні логічні операції та їх застосування.

23. Числова послідовність.

24. Обмежені та монотонні послідовності.

25. Границя послідовності.

26. Границя функції.

27. Властивості границь.

28. Перша чудова границя.

29. Друга чудова границя.

30. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

31. Правило Лопіталя.

32. Неперервність функцій.

33. Основні теореми про неперервність функції.

34. Класифікація розривів функцій.

35. Похідна функції.

36. Геометрична та механічна інтерпретація похідної.

37. Обчислення похідної.

38. Диференціал.

39. Похідні та диференціали вищих порядків.

40. Дослідження функцій та побудова їх графіків.

41. Функції однієї змінної. Основні елементарні функції та їх графіки.

42. Рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці.

43. Асимптоти функції: горизонтальні, вертикальні та похилі.

44. Графіки функцій двох змінних.

45. Локальні екстремуми.

46. Частинні похідні.

47. Повний диференціал.

48. Наближене обчислення функції за допомогою диференціала.

49. Метод найменших квадратів.

50. Функції кількох змінних.

51. Поняття первісної та невизначеного інтеграла.

52. Невизначений інтеграл та його властивості.

53. Метод безпосереднього інтегрування.

54. Метод заміни змінної.

55. Метод інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

56. Інтегрування раціональних дробів.

57. Інтегрування тригонометричних функцій.

58. Інтегрування ірраціональних функцій.

59. Визначений інтеграл та його властивості.

60. Обчислення визначеного інтеграла.

61.Теорема Ньютона-Лейбніца.

62.Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

63. Метод інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

64. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.

65. Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла.

66. Застосування визначеного інтеграла.

67. Диференціальні рівняння першого порядку, їх класифікація.

68. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

69. Однорідні диференціальні рівняння першого по рядку.

70. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод Бернуллі.

71. Рівняння у повних диференціалах.

72. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

73. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку, їх класифікація.

74. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.

75. Загальний та частинний розв'язки лінійного одно рідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

76. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

77. Однорідні диференціальні лінійні рівняння другого порядку.

78. Диференціальні лінійні рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.

79. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

80. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

81. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

**Основна:**

1. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Алгебра та геометрія для економістів. -К.:УФІМБ, 1998.

2. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. - К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004.

3. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах: Навч. посібник.- К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2003.

4.Барарановська Л.В. Завдання для практичних занять з «Вищої математики»: Методичний посібник. - К.: Вид-во І іфоп ун-ту, 2002.

5. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. - К.: Вища школа, 1987.

6. Пулига К.Б., Міхайленко В.М. Комп'ютерний практикум їз застосуванням математичних методів в економіці. - К: Вид-во Європ. ун-ту, 2000.

7. Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Вища математика. - К.: Вища школа, 1989.

8. Плис А.И., Сливина H.A. MATHCAD: математический практикум . M.: Финансы и статистика, 1999.

9. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів. - К.: Вид-во Європ. ун-ту, 1999.

**Додаткова:**

10. Литвин LI., Конончук О. М.Ю, Желізняк Г.О. Вища математика. Навч. посібник. — К.: Центр навчальної літератури. — 2004.

11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов: В 2-х ч. Ч.1.-М.:Высш.школа, 1986.

12. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1992.

13. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. -К.: Вища школа, 1990.

14. Замков 0.0., Толстопятенко A.B., Черемних Ю.Н Математические методы в экономике - М.: ДИС, 1997.

15. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1989.